

Total No. of Printed Pages—8

**2 SEM FYUGP MTHC2**

**2025**

( May/June )

**MATHEMATICS**

( Core )

Paper : MTHC2

**( Real Analysis and Differential Equations )**

*Full Marks* : 60 (80 for 2023 Batch)

*Time* : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

*The figures in the margin indicate full marks for the questions*

UNIT—I

1.  $R$ র ত্রিবিভাজন ধর্মটো লিখা। 1  
Write the trichotomy property of  $R$ .
2. মুক্ত অন্তর্বাল  $(a, a)$ ক এটা সংহতি হিচাপে প্রকাশ কবা। 1  
Express the open interval  $(a, a)$  as a set.
3. যদি  $a \in R$  যাতে যি কোনো  $\varepsilon > 0$  ব বাবে  $0 \leq a < \varepsilon$ , তেস্তে  
প্রমাণ কবা যে  $a = 0$ . 2  
If  $a \in R$  is such that  $0 \leq a < \varepsilon$  for every  $\varepsilon > 0$ ,  
then prove that  $a = 0$ .

P25/1333

( Turn Over )

( 2 )

4. (a) যদি  $S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  
 $\inf S = 0$ .  
 If  $S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in N \right\}$ , then show that  $\inf S = 0$ .
- (b) যদি  $x \in R$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে  $n_x \in N$  পোৱা যাব  
 যাতে  $x \leq n_x$ .  
 If  $x \in R$ , then prove that there exists  
 $n_x \in N$  such that  $x \leq n_x$ .
- (c) যদি  $y > 0$ , তেন্তে দেখুওৱা যে  $n_y \in N$  পোৱা যাব  
 যাতে  $n_y - 1 < y < n_y$ .  
 If  $y > 0$ , then show that there exists  
 $n_y \in N$  such that  $n_y - 1 < y < n_y$ .
5. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা :

Answer any one :

- (a) যদি  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in N$  বদ্ধ আৰু সীমাবদ্ধ  
 অন্তৰালৰ এটা অন্তৰ্নিহিত অনুক্রম হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা  
 যে এটা  $\xi \in R$  পোৱা যাব যাতে সকলো  $n \in N$  বাবে  
 $\xi \in I_n$ .  
 If  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $n \in N$  is a nested  
 sequence of closed bounded intervals,  
 then prove that there exists a number  
 $\xi \in R$  such that  $\xi \in I_n$  for all  $n \in N$ .
- (b) দেখুওৱা যে একক অন্তৰাল  
 $[0, 1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  গণনযোগ্য নহয়।  
 Show that the unit interval  
 $[0, 1] = \{x \in R : 0 \leq x \leq 1\}$  is not countable.

P25/1333

( Continued )

( 3 )

6. যদি  $x$  আৰু  $y$  দুটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় যাতে  $x < y$ , তেন্তে দেখুওৱা  
 যে এটা অপৰিমেয় সংখ্যা  $z$  পোৱা যাব যাতে  $x < z < y$ .

If  $x$  and  $y$  are real numbers with  $x < y$ , then  
 show that there exists an irrational number  $z$   
 such that  $x < z < y$ .

UNIT—II

7.  $\{n^2\}$  অনুক্রমটোৰ 3-টেইলটো লিখা।  
 Write the 3-tail of the sequence  $\{n^2\}$ .
8. প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অভিসাৰী অনুক্রম এটা সীমাবদ্ধ  
 অনুক্রম।  
 Prove that a convergent sequence of real  
 numbers is bounded.

9. (a) অনুক্রম  $X = \{x_n\}$ ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত  
 Examine the convergence of the  
 sequence  $X = \{x_n\}$  where  

$$x_n = \frac{n^2}{n+1}$$

- (b)  $\sum x_n$  ৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা, য'ত  
 Examine the convergence of  $\sum x_n$  where

$$\sum x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2

P25/1333

( Turn Over )

( 4 )

10. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা :

4

Answer any one :

(a) প্রমাণ কৰা যে  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  অনুক্রমটো এটা কছি অনুক্রম। এই অনুক্রম কিয় অভিসাৰী হয়, যুক্তি দিয়া।

Prove that the sequence  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  is a Cauchy sequence. State why it is convergent.

(b) প্রমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুক্রম এটা অভিসাৰী হ'ব যদি আৰু যদিহে ই এটা কছি অনুক্রম হয়।

Prove that a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

11. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা :

4

Answer any one :

(a) অনুক্রমৰ একেস্বৰ অভিসৰণ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা।

State and prove monotone convergence theorem for sequence.

(b) দেখুওৱা যে  $p$ -শ্ৰেণী

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ টো}$$

$p > 1$  ব বাবে অভিসাৰী আৰু  $0 < p \leq 1$  ব বাবে অপসাৰী।

P25/1333

( Continued )

( 5 )

Show that the  $p$ -series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converges when  $p > 1$  and diverges when  $0 < p \leq 1$ .

UNIT—III

12. যদি  $e^{mx}$  ফৰম  $m$ ৰ কিছু নিৰ্দিষ্ট মানৰ বাবে

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

এটা সমাধান হয়, তেন্তে  $m$ ৰ মানবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

2

For certain values of the constant  $m$ , the function  $e^{mx}$  is a solution of the differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

Determine all such values of  $m$ .

13. যি কোনো এটা সমাধান কৰা :

3

Solve any one :

$$(a) (1 + e^{\frac{x}{y}}) dx + e^{\frac{x}{y}} (1 - e^{\frac{x}{y}}) dy = 0$$

$$(b) y(xy + 2x^2y^2) dx + x(xy - x^2y^2) dy = 0$$

14. যি কোনো এটা সমাধান কৰা :

3

Solve any one :

$$(a) y^2 dx + (3xy - 1) dy = 0$$

$$(b) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x}$$

P25/1333

( Turn Over )

15. যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any one :

(a)  $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$

(b)  $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$

UNIT—IV

16. (a) যি কোনো এটা সমাধান কৰা : 3

Solve any one :

(i)  $\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} + 10y = 0, y(0) = -4, y'(0) = 2$

(ii)  $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) সমাধান কৰা : 4

Solve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^x - 10\sin x$$

17. যি কোনো এটাৰ উত্তৰ কৰা : 4

Answer any one :

(a) অনিৰ্ণেয় সহগ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা :

Solve by the method of undetermined coefficients :

$$y'' + 6y' + 9y = 2\sin x$$

(b) সমাধান কৰা :

Solve :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} - 8y = 4\log x$$

18. প্ৰাচলসমূহৰ ভেদ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰা : 4

Solve by the method of variation of parameters :

$$\frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

19. (a) এটা অৱকল সমীকৰণৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন সমাধানসমূহৰ বঙ্গকিয়ানৰ মানৰ প্ৰকৃতি কেনেকুৱা ? 1

What is the nature of the value of the Wronskian of the linearly independent solutions of a differential equation?

(b) দেখুওৱা যে  $e^{-x}$ ,  $e^{3x}$  আৰু  $e^{4x}$  ফলনকেইটা

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

সমীকৰণৰ বৈখিকভাৱে স্বাধীন সমাধান। এতেকে সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান লিখা।  $2+1=3$

Show that the functions  $e^{-x}$ ,  $e^{3x}$  and  $e^{4x}$  are all linearly independent solutions of

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

and hence, write the general solution of the equation.

( 8 )

( অতিৰিক্ত ২০ নম্বৰ ২০২৩ বৰ্ষৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ বাবে )

( Additional 20 marks for 2023 Batch )

20. অনুক্রমৰ বলয়েন'-ৰেইবছট্টাচ উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.

21. অনুক্রমৰ অপসাৰিতাৰ চৰ্ত লিখি প্ৰমাণ কৰা। 5

State and prove divergence criteria for sequences.

22. তলৰ যি কোনো দুটাৰ সমাধান কৰা : 5×2=10

Solve any two from the following :

(i)  $\frac{dy}{dx} + y = x^2 e^{-x}$

(ii)  $\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$

(iii)  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^{2x}$

\*\*\*