

Total No. of Printed Pages—7

**4 SEM FYUGP MINMTH4**

**2025**

( June )

**MATHEMATICS**

( Minor )

Paper : MINMTH4

( Algebra )

Full Marks : 60

Time : 2 hours

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions*

1. (a) সত্য নে অসত্য লিখা :

State True or False :

(i) মেট্রিক্স পূৰ্ণৰ সাপেক্ষে নিৰ্ণায়ক 1 হোৱা পৰিমেয়  
সংখ্যাৰ  $2 \times 2$  মেট্রিক্সৰ সংহতিটো ক্রমবিনিমেয়  
গোট।

1

The set of all  $2 \times 2$  matrices with  
determinant 1 with entries from  $Q$  is  
an Abelian group under matrix  
multiplication.

P25/1440

( Turn Over )

( 2 )

- (iii) সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ সাপেক্ষে  
 $\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$  এটা গোট। 1  
 $\{x^n - 1 = 0 | x \in C\}$  is a group under multiplication.
- (b)  $Z_n$  ত  $j > 0$  ৰ বাবে  $j$  ৰ বিপৰীত কি হ'ব, লিখা। 1  
Write the inverse of  $j$  in  $Z_n$ ,  $j > 0$ .
- (c) ক্ৰমবিনামেয় গোটৰ সংজ্ঞা লিখা। 2  
Define an Abelian group.
- (d) দেখুওৱা যে সাধাৰণ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে ধণাত্মক অপৰিমেষ সংখ্যাৰ সংহতি  $S$  এটা গোট নহয়। 2  
Show that the set  $S$  of positive irrational numbers is not a group under usual multiplication composition on it.
- (e) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোটত একক মৌল অনন্য। 2  
Prove that identity element in a group is unique.
- (f)  $GL(2, Z_7)$  ত  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  ৰ বিপৰীত কি হ'ব? 3  
Find the inverse of  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$  in  $GL(2, Z_7)$ .

P25/1440

(Continued)

( 3 )

- (g) প্ৰমাণ কৰা যে এটা গোট  $G$  ত 3  
Prove that in a group  $G$   
 $(abc)^{-1} = c^{-1}b^{-1}a^{-1} \forall a, b, c \in G$
- (h) প্ৰমাণ কৰা যে ' $X_5$ ' সাপেক্ষে সংহতি  $\{1, 2, 3, 4\}$  এটা গোট। 4  
Show that the set  $\{1, 2, 3, 4\}$  is a group with respect to ' $X_5$ '.
2. (a) অখণ্ড সংখ্যাৰ সমষ্টি  $Z$ , বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগজ গোট  $Q$  ৰ এটা উপগোট হয়নে? 1  
Is the set  $Z$  of integers a subgroup of the additive group  $Q$ ?
- (b)  $U(10)$  গোটৰ ক্ৰম কিমান? 1  
Write the order of the group  $U(10)$ .
- (c) প্ৰমাণ কৰা যে গোট  $G$  ৰ কেন্দ্ৰ,  $G$  ৰ এটা উপগোট। 3  
Prove that centre of a group  $G$  is a subgroup of  $G$ .

P25/1440

(Turn Over)

( 4 )

- (d) প্রমাণ কৰা যে  $G$  ৰ অবিভক্ত উপসংহতি  $H$  উপগোট হোৱাৰ প্ৰয়োজনীয় পৰ্যাপ্ত চৰ্তটো হ'ল  
 $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ .

6

Prove that a necessary and sufficient condition for a non-empty subset  $H$  of a group  $G$  to be a subgroup of  $G$  is that  
 $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ .

অথবা / Or

চক্ৰীয় গোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে  $n$  কোটিৰ সসীম গোট এটা চক্ৰীয় গোট হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি ইয়াত  $n$  কোটিৰ এটা উপাদান থাকে।

Write the definition of cyclic group. Prove that a finite group of order  $n$  is cyclic if and only if it has an element of order  $n$ .

3. (a) অভিলম্ব উপগোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে  $H$  এটা  $G$  গোটৰ অভিলম্ব উপগোট যদি আৰু একমাত্ৰ যদি  
 $gHg^{-1} = H \forall g \in G$ . 1+4=5

Define normal subgroup. Prove that  $H$  is a normal subgroup of a group  $G$  if and only if  $gHg^{-1} = H \forall g \in G$ .

P25/1440

( Continued )

( 5 )

- (b) লেগ্ৰেঞ্জৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰি প্রমাণ কৰা। 1+5=6

State and prove Lagrange's theorem.

অথবা / Or

ধৰা হ'ল,  $H$  এটা  $G$  ৰ উপগোট আৰু  $a, b \in G$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে—

(i)  $Ha = Hb$ , যদি আৰু যদিহে  $ab^{-1} \in H$ ;

(ii)  $Ha$  এটা  $G$  ৰ উপগোট হ'ব যদি আৰু যদিহে  $a \in H$ .

Let  $H$  be a subgroup of a group  $G$  and  $a, b \in G$ , then prove that—

(i)  $Ha = Hb$  if and only if  $ab^{-1} \in H$ ;

(ii)  $Ha$  is a subgroup of  $G$  if and only if  $a \in H$ .

4. (a) ক্ৰমবিনিমেয় নোহোৱা ৰিং এটাৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a non-commutative ring.

- (b) এটা ৰিংৰ একক মৌলৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define unit element in a ring.

P25/1440

( Turn Over )

( 6 )

(c) এটা আইডিয়েল নোহোৱা উপবিংৰ উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a subring which is not an ideal.

(d) প্রমাণ কৰা যে বিংত থকা সকলো  $a, b$  ৰ বাবে 2

Prove that for all  $a, b$  in ring  $R$

$$a(-b) = (-a)b = -ab$$

(e) দেখুওৱা যে  $Z_{12}$  ইনটিগ্ৰেল ড'মেইন নহয়। 2

Show that  $Z_{12}$  is not an integral domain.

(f) প্রমাণ কৰা যে এটা বিং  $R$  ৰ উপসমষ্টি  $S \neq \emptyset$ ,  $R$  ৰ উপবিং হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি  $a-b \in S$  আৰু  $ab \in S \forall a, b \in S$ . 4

Prove that a subset  $S \neq \emptyset$  of a ring  $R$  is a sub-ring of  $R$  if and only if  $a-b \in S$  and  $ab \in S \forall a, b \in S$ .

(g) প্রমাণ কৰা যে  $R$  বিংৰ যি কোনো দুটা আইডিয়েল  $A$  আৰু  $B$  ৰ কাৰণে  $A+B$  এটা  $R$  ৰ আইডিয়েল হয় য'ত  $A+B$  য়ে  $A$  আৰু  $B$  দুয়োটাকে অন্তৰ্ভুক্ত কৰি লয়। 4

Prove that for any two ideals  $A$  and  $B$  of a ring  $R$ ,  $A+B$  is an ideal of  $R$  containing both  $A$  and  $B$ .

P25/1440

(Continued)

( 7 )

(h) প্রমাণ কৰা যে যি কোনো সসীম শূন্যভাজক নথকা বিং  $R$  এটা বিভাজন আঙঠি। 4

Prove that any finite non-zero ring  $R$  without zero division is a division ring.

\*\*\*

P25—2500/1440

4 SEM FYUGP MINMTH4