Total No. of Printed Pages—7

1 SEM FYUGP MINMTH1

2025

(November)

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MINMTH1

(Differential Calculus)

Full Marks : 60 (80 for 2023 Batch)

Time : 2 hours (3 hours for 2023 Batch)

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* ε-δ চৰ্ত অনুযায়ী সীমাৰ সংজ্ঞা লিখা। 1

Write the definition of limit using ε-δ criterion.

(b)
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{যদি } x \neq 2 \\ 0 & \text{যদি } x = 2 \end{cases}$$

ফলনৰ বাবে বিচ্ছিন্নতাৰ বিন্দুবোৰ শ্ৰেণীবদ্ধ কৰা। 2

Classify the points of discontinuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \neq 2 \\ 0 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

(c) প্ৰমাণ কৰা যে যি কোনো অবিৰত ফলন এটা বদ্ধ অন্তৰাল $[a, b]$ত সীমাবদ্ধ। 4

Prove that any continuous function defined on a closed interval $[a, b]$ is bounded.

(d) যদি $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y = 0$$ 4

If $y = \cos(m \sin^{-1} x)$, show that

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y = 0$$

2. (a) ফলন $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ৰ বাবে f_x, f_y উলিওৱা। 2

Find f_x, f_y for the function $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

(b) যদি $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, দেখুওৱা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 3

If $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, show that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(c) যদি $u = x^y$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$ 2

If $u = x^y$, then prove that

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

(d) যদি $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x)$, প্ৰমাণ কৰা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$ 4

If $u = x\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi(x)$, prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = x\phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. (a) $y = f(x)$ আৰু $y = \phi(x)$ বক্ৰবোৰৰ ছেদৰ কোণটো লিখা। 1

Write the angle of the intersection of the curves $y = f(x)$ and $y = \phi(x)$.

(b) বক্ৰ

$$x = a(2\cos t + \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$-ৰ

বাবে 't' বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা। 3

Find the equation of the normal at 't' on the curve

$$x = a(2\cos t + \cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

(c) দেখুওৱা যে $r^m = a^m \cos m\theta$ বক্ৰৰ মেৰুৰ মাজেৰে যোৱা বক্ৰতাৰ জ্যা হৈছে $\frac{2r}{m+1}$. 5

Show that the chord of curvature through the pole of the curve $r^m = a^m \cos m\theta$ is $\frac{2r}{m+1}$.

(d) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$ বক্ৰৰ অনন্তস্পৰ্শী নিৰ্ণয় কৰা। 5

Determine the asymptotes of the curve $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + 2xy + 2y^2 - 3x + y = 0$

(e) $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ৰৰ চিত্ৰ অংকন কৰা। 5

Trace the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

4. (a) ৰ'লৰ উপপাদ্যটো লিখা। 2

State Rolle's theorem.

(b) যদি $0 < u < v$, দেখুওৱা যে

$$\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}$$ 5

Show that

$$\frac{v-u}{1+v^2} < \tan^{-1} v - \tan^{-1} u < \frac{v-u}{1+u^2}$$

if $0 < u < v$.

(c) টেইল'ৰৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে $x > 0$ৰ বাবে $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$. 3

Using Taylor's theorem, show that $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, for $x > 0$.

(d) ফলন $\log(1+x)$-ৰ বাবে মেকলৰিনৰ অসীম শ্ৰেণী নিৰ্ণয় কৰা। 5

Find the Maclaurin's infinite series for the function $\log(1+x)$.

(e) দিয়া আছে $xy = 4$, $4x + 9y$ৰ সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন মানসমূহ নিৰ্ণয় কৰা। 4

Given $xy = 4$, find the maximum and minimum values of $4x + 9y$.

অথবা / Or

মান নিৰ্ণয় কৰা :

Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

(Additional 20 marks for 2023 Batch)

5. (a) যদি $y = x^{2n}$, য'ত n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে দেখুওৱা যে $y_n = 2^n\{1.3.5...(2n-1)\}x^n$. 3

If $y = x^{2n}$, where n is a positive integer, then show that $y_n = 2^n\{1.3.5...(2n-1)\}x^n$.

অথবা / Or

যদি $y = \log(x + \sqrt{(1+x^2)})$, তেন্তে $y_n(0)$ নিৰ্ণয় কৰা।

If $y = \log(x + \sqrt{(1+x^2)})$, then find $y_n(0)$.

(b) যদি $f = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $xf_x + yf_y = 0$. 3

If $f = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, prove that $xf_x + yf_y = 0$.

(c) দেখুওৱা যে বক্ৰ $x^2y = a(x^2 + y^2)$ৰ বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ বিন্দু $(-2a, 2a)$ত $-2a$. 5

Show that the radius of curvature of the curve $x^2y = a(x^2 + y^2)$ at $(-2a, 2a)$ is $-2a$.

(Continued)

(d) $r = a(2\cos\theta + 1)$ বক্ৰৰ চিত্ৰ অংকন কৰা। 5

Trace the curve $r = a(2\cos\theta + 1)$.

6. প্ৰমাণ কৰা যে

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \cdots$$

যদি $|x| < a$. 4

Prove that

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \cdots$$

if $|x| < a$.

অথবা / Or

নিৰ্ণয় কৰা :

Find :

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{1}{2}ex - \frac{11}{24}ex^2}{x^3}$$

★ ★ ★